

## Musik und Mathematik

Zur Einleitung ein paar Zitate:

„Könnte nicht die Musik beschrieben werden als Mathematik des Gefühls und die Mathematik als Musik des Verstandes? Beide haben die gleiche Seele! So fühlt denn der Musiker Mathematik und der Mathematiker denkt Musik.“

J. J. Sylvester, englischer Mathematiker, im Jahr 1865

„Die Musik ist eine verborgene arithmetische Übung der Seele, die nicht weiß, dass sie mit Zahlen umgeht.“

Gottfried Wilhelm Leibniz

„Musikalischer Genuss ist mathematisch“

Novalis (Aus den Fragmenten)

„Die Erkenntnis der Musik erschließt sich nur der Vernunft. Alle an der Musik Teilnehmenden müssen über ein bloßes Registrieren musikalischer Eindrücke, über die oberflächliche und sentimentale Hingabe an das Klangliche hinauswachsen.“

Augustinus

Bei den allermeisten Menschen werden diese Zitate mit Kopfschütteln aufgenommen. Kein Wunder! Jedes Mitglied unserer westlichen Zivilisation macht zwar Bekanntschaft mit Mathematik und Musik, aber jeweils nur sehr einseitig. Mathematik steht für Logik, Kalkül und Verstand, Musik steht für Intuition, Inspiration und Emotion. Beide Seiten haben nach allgemeinem Verständnis nichts, aber auch gar nicht miteinander zu tun.

Sollte es mir gelingen zu verdeutlichen, dass diese Meinung unbegründet ist, dass im Gegenteil Intuition und Kalkül die beiden Gesichter ein und derselben Sache sind, so wäre ich mit dem Erfolg dieses Vortrages sehr zu Frieden. Sie gehören zusammen nach dem Vorbild des Janus-Kopfes. Seit der Kalenderreform von Cäsar ist der Januar (abgeleitet von mensis ianuarus, dh der zum Gott Ianus gehörige Monat) der erste Monat des Jahres. Der Gott Ianus hat einen Kopf mit zwei Gesichtern; mit dem einen schaut er ins alte, mit dem andern ins neue Jahr. Ianua heisst Tür; die meisten Darstellungen des Gottes Ianus findet man auf Türen.

Kleines Bekenntnis: Meine Bekanntschaft mit der Mathematik fing an wie bei den Allermeisten. Ich konnte Mathematik schlicht und ergreifend nicht ausstehen. Kleiner Exkurs dazu. Kurs „Mathematik von der Schule zur Hochschule“ und unser Dozent. „Mathematik ist was für kindliche Gemüter wie mich“. Neuerschaffung der Welt mit bunten Klötzchen. Mir dämmerte die Erkenntnis: In der Mathematik gibt's aufregende kreative Prozesse und die Intuition spielt die entscheidende Rolle.

Lassen wir zwei Großmeister zu Wort kommen:

„Endlich vor ein paar Tagen ist's gelungen – aber nicht mit meinem mühsamen Suchen, sondern bloß durch die Gnade Gottes, möchte man sagen. Wie der Blitz einschlägt, hat sich das Rätsel gelöst; ich selbst wäre nicht imstande, den leitenden Faden zwischen dem, was ich vorher wusste, dem, womit ich die letzten Versuche gemacht hatte – und dem, wodurch es gelang, nachzuweisen,“ C.F. Gauss, aus seinen Briefen)

„Ich hatte schwarzen Kaffee getrunken und konnte nicht schlafen. Vorstellungen kamen mir haufenweise. Ich merkte, wie sie zusammenstießen, bis einzelne Paare sich sozusagen einhängten, um eine stabile Verbindung einzugehen. Es kommt mir in solchen Fällen vor, als ob man bei seiner eigenen unbewussten Arbeit anwesend ist. Die unbewusste Arbeit macht sich dem übererregten Bewusstsein teilweise bemerkbar, ohne jedoch ihren eigenen Charakter zu verlieren. Bei solchen Gelegenheiten ahnt man den Unterschied in den Mechanismen beider Egos.“ (Poincaré, um 1900)

Beim Poincaré Zitat würden die meisten sicher eher an die Beschreibung der Entstehungsgeschichte eines Bildes von Klee denken als an die Schilderung mathematischer Denkprozesse. Nehmen wir's als Hinweis darauf, dass kreative Prozesse Gemeinsamkeiten haben – unabhängig von ihrem fachlichen Bezug oder von den Arbeitsmitteln und Methoden, die man gemeinhin einem Arbeitsfeld zuordnet.

Nachdem wir solchermaßen die Rolle der Intuition in der Mathematik beleuchtet haben, wenden wir uns der Rolle des Kalküls in der Musik zu-. Genauso unerwartet für die Musik, wie die Rolle der Intuition in der Mathematik.

Im Jahre 1746 hat Haussmann Johann Sebastian Bach gemalt. Das Portrait gehörte zu den Aufnahmebedingungen, die Bach erfüllen musste, um in die Mizler'sche Musik-Sozietät (Correspondierende Societät der Musickalischen Wissenschaften) aufgenommen zu werden. Diese Gesellschaft hat gewiss bleibende Verdienste – aber nicht das kleinste ist, Bach durch ihre Aufnahmebedingungen dazu gezwungen zu haben, ein lebensgroßes Portrait von sich anfertigen zu lassen. Auf diesem berühmten Porträt hält Bach ein Notenblatt in der Hand mit der Aufschrift Canon triplex a 6 voci (Dreifacher Kanon zu 6 Stimmen). Der Betrachter muss die drei fehlenden Stimmen erraten, das heißt: wann sie einsetzen und wie sie aus den auf dem Notenblatt angegebenen Stimmen erzeugt werden können. (Transponierung, Spiegelung, Krebs, Krebs-Spiegelung, Augmentation usw.) Insgesamt gibt es 11 239 424 verschiedene Möglichkeiten, die drei fehlenden Stimmen zu ergänzen( bei Verzicht auf Augmentation, ansonsten noch wesentlich mehr). Würde man alle 11 239 424 Möglichkeiten durchprobieren und für jeden Versuch 1 Minute brauchen, so wäre man nach ca 21 Jahren fix und fertig und müsste immer noch mehr als weitere vier Monate probieren. . . Eine Lösung zum Bach'schen Rätselkanon wurde erstmals 1840 von dem Hessischen Kapellmeister André angegeben. Lange wurde gerätselt, ob es weitere Lösungen geben kann. In den 80er Jahren des vorigen Jahrhunderts wurde von dem Mathematiker Rudolf Wille bewiesen, dass es nach den Regeln des Bach'schen Kontrapunkts (erlaubte Stimmführungen, harmonische Fortschreitungen usw) genau eine Lösung gibt: Spiegelung der Stimmen und Einsatz nach einem Takt. Der Beweis für die Eindeutigkeit der Lösung des Rätselkanons ist nicht einfach.

Wir wissen, dass Bach wusste, dass es nur eine Lösung geben kann. Wie: das ist das bleibende Rätsel des Rätselkanons.

Insgesamt gibt es vier Felder, auf denen Musik und Mathematik gemeinsam auftreten:

- Bei den akustischen Grundlagen
- Mathematik als Hilfsmittel der Deutung von Musik
- Mathematische Methoden als Arbeitsmittel der Komposition
- Gemeinsamkeiten kreativer Prozesse

## 1) Akustische Grundlagen

Pythagoräer. Aufbau der Proportionen Lehre; der ganze Kosmos ist geordnet durch universell gültige Zahlbeziehungen.

Verallgemeinerung der Untersuchungen am Monochord. Kurze Erläuterung.

Oktave: zwei Töne, abgegriffen auf dem Monochord im Längenverhältnis 1:2

Quinte, zwei Töne abgegriffen auf dem Monochord im Längenverhältnis 2:3

Quarte, zwei Töne, abgegriffen auf dem Monochord im Längenverhältnis 3:4

Grundgesetz: Dem Abspielen von Intervallen entspricht die Multiplikation der zugehörigen Verhältniszahlen.

Beispiel: Quinte und draufgesetzte Quarte ergibt Oktave  $2:3 \times 3:4 = 1:2$   
Vorsingen.

Weitergeführt zu einer Theorie der Tonleitern, der Harmonik, Begründung ästhetischer Wirkungen durch Proportionen.

Dies verschaffte der Musik den Eintritt in den Bildungskanon von Antike und Mittelalter, die so genannten „septem artes liberales“ (7 freie Künste):

Vorstudium war das Trivium: Grammatik, Rhetorik, Dialektik,

Hauptstudium war das Quadrivium: Arithmetik, Geometrie, Astronomie, Musik

Zur umfassenden Bedeutung der Proportionen, von Maß und Zahl, gehörte auch die Vorstellung, dass die Planetenbahnen nach harmonischen Proportionen geordnet sind und daher die „Sphärenmusik“ erzeugen.

Hier muss das Goethe Zitat (Vorspiel Faust) her:

Die Sonne tönt nach alter Weise  
Im Brudersphären Wettgesang,  
Und ihre vorgeschriebne Reise  
Vollendet sie mit Donnergang.  
Ihr Anblick gibt den Engeln Stärke,  
Da keiner sie ergründen mag;  
Die unbegreiflich hohen Werke  
Sind herrlich wie am ersten Tag.

Dem Mathematiker und Musiker Guerino Mazzola verdanken wir die Erkenntnis, dass auch hinter dem ehrwürdigen Regelwerk von Fux: Gradus ad Parnassum (1725) mathematische Gesetze stehen. Nach den Regeln des Gradus ad Parnassum haben Mozart, Haydn, Beethoven, Schubert (der Überlieferung nach etwas unwillig) das musikalische Handwerk von Tonsatz und Kontrapunkt gelernt. Kleiner Exkurs dazu.

Fux teilt die Okave in 12 gleiche Halbtonschritte (Die Zahl steht für die Anzahl der benötigten Halbtonschritte)

0	Prime (mit Oktave identifiziert)
1	kleine Sekunde
2	grosse Sekunde
3	kleine Terz
4	grosse Terz
5	Quarte
6	Tritonus
7	Quinte
8	kleine Sext
9	grosse Sext
10	kleine Septime
11	grosse Septime
12	Oktave

Die 6 Konsonanzen sind die Intervalle 0,3,4,7,8,9

Die 6 Dissonanzen sind die Intervalle 1,2,5,6,10,11

Hirnphysiologisch bestätigt (Neurologische Untersuchungen am Universitätsspital Zürich, Heinz-Gregor Wieser)

Konsonanzen und Dissonanzen sind durch eine Formel, die erstmals von Mazzola angegeben wurde, miteinander verknüpft.  $k$  steht für Konsonanz,  $d$  steht für Dissonanz.

$$k = 5xd + 2 \pmod{12} \text{ gerechnet}$$

Erläuterungen dazu. Modulo 12 rechnen nach dem Vorbild der Uhr etc.

0,12,24,36,... werden mit 0 identifiziert

1,13,25,37,... werden mit 1 identifiziert

2,14,26,38,... werden mit 2 identifiziert

3,15,17,29,... werden mit 3 identifiziert

usw.

usw.

$$5 \times 1 + 2 = 7 \text{ (Konsonanz Quinte)}$$

$$5 \times 2 + 2 = 12 = 0 \pmod{12} \text{ (Konsonanz Prime bzw. Oktave)}$$

$$5 \times 5 + 2 = 27 = 3 \pmod{12} \text{ (Konsonanz kleine Terz)}$$

$$5 \times 6 + 2 = 32 = 8 \pmod{12} \text{ (Konsonanz kleine Sext)}$$

usw, usw

Dass entsprechend die Fux'schen Regeln zum Tonsatz ebenfalls mathematisch gedeutet werden können, dürfte nunmehr nicht mehr sonderlich überraschen.

Überraschender ist dann schon, dass es Mazzola gelang, die Modulationsstruktur zum ersten Satz der Sonate für das Hammerklavier, op. 106 von Beethoven, durch ein mathematisches Gesetz zu beschreiben.

Kleiner Exkurs dazu. Natürlich kannte Beethoven dieses Gesetz nicht; er wusste darum auf eine andere Weise – so wie Bach „wusste“, dass es für seinen Rätselkanon nur genau eine Lösung gibt.

Das Theorem von Mazzola ist auch gleichzeitig das erste Beispiel für unsere zweite Gruppe

## **2) Mathematik als Hilfsmittel bei der Deutung von Musik**

Guillaume Dufay (um 1400 bis 27.11.1474) war eine der prägenden Musikerpersönlichkeiten des 15. Jahrhunderts. Zur Weihe des Florentiner Domes durch Papst Eugen IV am 25. März 1436 wurde seine Motette *Nuper rosarum flores* uraufgeführt. Mir liegt die Untersuchung „Die Bedeutung der Zahl in Dufays Kompositionsart: *Nuper rosarum flores*“ der Autoren Ryschawy /Stoll aus dem Jahr 1988 vor, in der der Nachweis versucht wird, dass Dufay sein Werk vollständig nach spekulativ-mathematischen Prinzipien organisiert hat.

Die Proportionen der vier Teile der Motette verhalten sich wie 6:4:2:3, entsprechend Langhaus zu Querschiff zu Apsis zu Höhe des Doms. (Das sind auch die Grundproportionen des Salomonischen Tempels). Überdies entspricht der Aufbau der musikalischen Perioden Ausschnitten aus der Folge der Fibonacci-Zahlen. (0,1,1,2,3,5,8,13,21,.. etc. Gegeben sind 0,1 und jede weitere Zahl entsteht als Summe der beiden Vorgänger. Falls genügend Zeit kleiner Exkurs zur Bedeutung der Fibonacci Zahlen. ) Schon schwieriger in der Beurteilung der Stichhaltigkeit: Ordnet man Buchstaben Zahlen zu (zum Beispiel Stellung des Buchstabens im Alphabet – es gibt aber auch andere Methoden), so erhält man durch Addition, Darstellung im römischen oder arabischen Zahlensystem, durch Quersummenbildung usw. Zahlwerte für Wörter. (Fachausdruck hierfür „Gematrie“). Bestimmte Zahlen haben eine besondere Bedeutung, zum Beispiel 33 (Lebensalter Jesu) oder 22 (der 22. Buchstabe im griechischen Alphabet ist Chi für Christos) usw. Es bleibt nichts ohne Deutung und Bedeutung. Die Autoren versuchen den Nachweis, dass der Text der Motette, seine Umsetzung in Zahlen, die Proportionen der Motette sowie der mit den Zahlen und ihren Verhältnissen verbundene mystisch religiöse Gehalt eine Einheit bilden. Sie definieren sogar einen mathematischen Operator, aus dem die Struktur der Motette ausgehend von Grundelementen vollständig ableitbar wird.

Wer in jüngeren Jahren das schöne Buch „Der Kampf um die Cheopspyramide“ von Max Eyth gelesen hat, fühlt sich nicht ohne Schmunzeln an die dort vorgetragene Deutung der Cheopspyramide erinnert. Keines der Masse des Bauwerks bleibt ohne Deutung und es ist absolut erstaunlich, was man alles an Deutungen herausholen kann. Kleiner Exkurs zur Bedeutung des offenen Deutungshorizontes – falls genügend Zeit.

### 3) Mathematische Methoden als Arbeitsmittel der Komposition (Kalkül)

Wichtige Beispiele sind serielle Musik (50iger Jahre und folgende), sowie neuere Ansätze, wie sie zum Beispiel von Hanspeter Kyburz vertreten werden. (Composer in Residence Luzern Festival 2001).

Zitat aus Gottfried Michael König, System und Zufall 1967 erläutern:

„Die serielle Großform entsteht im Prinzip dadurch, dass für jeden Parameter so viele Reihen (d.h. Permutationen) ablaufen, bis das Ende des Werkes erreicht ist. Um Blöcke zu vermeiden, in denen alle Parameter-Reihen gleichzeitig beginnen oder enden, macht man Reihen verschieden lang oder lässt die Parameter verschiedenen Dauerreihen folgend. Dadurch entstehen mannigfache Überschneidungen, die der Komponist wohl berechnen, nicht aber im voraus hörend sich vergegenwärtigen kann. Es tritt eine Art zeitliche Kompression ein: während der klassische Komponist sein Werk Zeitpunkt für Zeitpunkt komponiert und die Zeitpunkte hörend aufeinander beziehen kann, wirft der serielle Komponist ein Beziehungsnetz über die Dauer des Werkes.“

Falls genügend Zeit, erläutern, was das für das Endprodukt und den Hörer bedeutet. (Adorno Zitat: Die moderne Musik kommt ohne so genannte Einfälle aus. Der Einfall hat bestenfalls Schlagerniveau.)

Kompositionsmethode von Hanspeter Kyburz erläutern: Algorithmischer Aufbau, elektronische Realisierung mittels Notensatz-Programmen wie zum Beispiel Sibelius; die schöpferische Freiheit liegt in der Erfindung des Algorithmus, durch den das Musikstück determiniert ist. Gegensatz zur geschilderten Kompositionsmethode im Zitat von Gottfried Michael König. Dort werden einfach mechanisch Permutationsreihen musikalischer Parameter durchlaufen.

Auch Kyburz erreicht mit seiner Methode eine vollständige Strukturierung des musikalischen Materials: Jede Note der Partitur ist durch einen Algorithmus festgelegt. Die schöpferische kompositorische Leistung liegt einzig und allein in der Erfindung des Algorithmus. Noch ist unvorstellbar, dass sich aus dem Hören der Komposition der bestimmende Algorithmus erschliessen lässt. Vielleicht wird das eine künftige Generation von Hörern können?

Die Radikalität des Ansatzes von Kyburz erschließt sich am besten durch Vergleich mit klassischen Komponisten, die sehr formbewußt gearbeitet haben. Zum Beispiel Mozart: Seine Kompositionen sind sehr strukturiert, aber nicht durch die Struktur bestimmt. Der Charme seiner Kompositionen beruht nicht zuletzt auf bewusster Strukturverletzung, auf völlig unerwarteten Wendungen, auf Modulationen, die sich gegen die Routine erprobter Abläufe stellen und auf Dissonanzen, die Hörgewohnheiten zum Narren halten. „Ein Musikalischer Spaß“ (KV 522) verrät uns, wie wichtig Mozart die Beherrschung von Form und Struktur im kompositorischen Handwerk war. Aber seine großen Werke verraten uns, dass Originalität, Charme und Tiefenwirkung seiner Musik auf bewusster Regelverletzung und Störung der Struktur beruhen. (Ggf. mehr detailliert an Beispielen erläutern. Klassische griechische Bauwerke: Ihre Wirkung beruht auf Einhaltung der Symmetrie im Grossen, aber Symmetrieverletzung im Kleinen usw usw)

Zusatzbeispiel: Computermusik, seit Iliac Suite 1949. Maschinelles Komponieren nach algorithmisch definierten Regeln. Moderne Unterhaltungsmusik für Flugzeug,

Flughafen, Hotel, Aufzug etc. nach vorgegebenem psychologischen Profil kann so maschinell komponiert und realisiert werden.

#### **4) Gemeinsamkeiten kreativer Prozesse (Intuition)**

Intuition ist unersetzbar, das heißt nicht durch maschinelle Verfahren, geschickte Algorithmen usw. ersetzbar. Bewiesen durch den Unvollständigkeitssatz von Kurt Gödel 1932. (Veranschaulichung durch die Erzählung von Borges: Die Bibliothek von Babylon)

Die Geheimnisse kreativer Arbeit: Analogien, Symmetrien, Variationen, Ästhetik, (was schön ist, ist auch wahr), Assoziationen. Erfahrene Gemeinsamkeiten musikalischer und mathematischer Arbeit.

Hinweis, wie nahe sich Musik und Mathematik kommen, durch Strawinsky Zitat – und den Vergleich mit Poincaré:

Aus Strawinsky, Musikalische Poetik, 1949

„Inspiration, Kunst, Künstler – das sind zumindest recht verwirrende Worte. Sie hindern uns, klar zu sehen; in der Kunst ist alles Ausgleich und Berechnung, hier weht der Atme des spekulativen Geistes. Danach, und wirklich erst danach, entsteht jene Gefühlsregung, die der Inspiration zugrunde liegt. Man spricht unzüchtig von dieser Gefühlsregung, wenn man ihr einen Sinn unterlegt, der hemmend auf uns wirkt und die Sache selbst kompromittiert. Ist es nicht klar, dass diese Erregung nichts anderes ist als eine Reaktion des schöpferischen Menschen im Kampf mit jenem Unbekannten, das bis jetzt nur ein Objekt seiner Schöpfung ist und das ein Werk werden soll?

An ihm ist es nun, das Werk zu entdecken, Glied um Glied, Masche um Masche. Diese Kette von Entdeckungen, und jede Entdeckung für sich, ruft die Erregung hervor – eine Art von physiologischem Reflex, so wie der Appetit den Speichel hervorruft – und diese Erregung folgt stets, und zwar genau, den Stufen des schöpferischen Vorgangs.“

Ein Vergleich mit dem eingangs zitierten Text von Poincaré zeigt: Die beiden könnten sich mit derselben Sache beschäftigen.